Διάλεξη 7η : Πέμπτη 7 Απρίλη 2016, 6-9 μ.μ.

ΘΕΜΑ: Συμπληρώσεις - Εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace

ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5: Εξισώσεις Διαφορών με συνεχή μεταβλητή

Η εξίσωση διαφορών με συνεχή μεταβλητή και σταθερό συντελεστή $a \in \Re$

$$y(t-\tau) - ay(t) = f(t), t \geq 0, \quad y(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0].$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν η συνάρτηση f [*μετασχηματίζεται κατά Laplace*] και η συνάρτηση ϕ είναι κατά τμήματα συνεχείς και εκθετικής τάξης (ολοκληρώσιμη) τότε οι λύσεις της εξίσωσης μετασχηματίζονται κατά Laplace.
Απόδειξη.

Το προηγούμενο συμπέρασμα μπορεί να γενικευτεί για την εξίσωση

$$y(t+\tau_1) + a_1 y(t+\tau_2) + ... + a_k y(t+\tau_k) = f(t), t \geq 0, \quad y(t) = \phi(t), t \in [-max\{\tau_k\}, 0].$$

Παράδειγμα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6: Εξισώσεις Διαφορών με διακριτή μεταβλητή - αναδρομικές ακολουθίες

Επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών με διακριτή μεταβλητή της μορφής

$$a_{n+k} + c_{k-1}a_{n+k-1} + ... + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = b(n), n \in N, \quad c_i \in \Re.$$

Ο μετασχηματισμός Laplace μιας (διακριτής) ακολουθίας (a_n) : η συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \Re$ με

$$f(t) = a_n, \quad t \in [n, n+1).$$

είναι κατά τμήματα συνεχής και εκθετικής τάξης r για $r > 0$, επομένως μετασχηματίζεται κατά Laplace. Είναι

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-sk}\frac{e^{-s}-1}{s}\Big] = (a_n)_{n \in N}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν η συνάρτηση $f(t) = \sum_0^{+\infty} b_n[H(t-n) - H(t-n-1)], \quad t \geq 0$ είναι εκθετικής τάξης r, τότε οι λύσεις της εξίσωσης διαφορών είναι εκθετικής τάξης r_0 για $r_0 > max\{0, r\}$.

Από την εφαρμογή μετασχηματισμού Laplace προκύπτει μια εξίσωσης της μορφής

$$L[y](s) = \frac{f(s)}{p(s)}$$

όπου

$$p(\lambda) = \lambda^k + c_{n-1}\lambda^{k-1} + ... + c_1\lambda^1 + c_0 \quad \lambda \in \Re,$$

είναι το καλούμενο ¨χαρακτηριστικό πολυώνυμο’ της ομογενούς εξίσωσης διαφορών (που προκύπτει από την αναζήτηση λύσεων της ομογενούς εξίσωσης που είναι της μορφής λ^n).

Παράδειγμα 1. Να επιλυθεί η εξίσωση

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} - 6a_n = 2n + 3, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad n \in N.$$

Παράδειγμα 2. Μια εξίσωση με χαρακτηριστική εξίσωση με διπλή ρίζα.

Παράδειγμα 3. Μια εξίσωση με χαρακτηριστική εξίσωση με μιγαδικές ρίζες.